

文章编号:1000-8055(2010)09-2013-06

# 基于分解策略的涡轮叶片可靠性及 多学科设计优化

贺 谦, 李元生, 温志勋, 岳珠峰

(西北工业大学 力学与土木建筑学院 工程力学系, 西安 710072)

**摘 要:** 将反一阶可靠性分析方法与多学科可行方法相结合,提出了一种适用于涡轮叶片复杂结构的可靠性及多学科设计优化方法.在优化过程中使用 Kriging 近似模型并不断提高模型精度,解决了多学科可行方法反复调用仿真程序进行多学科分析,计算量较大的问题.该方法将可靠性分析与多学科优化过程分离,提高了优化计算效率.以某型涡轮叶片的设计优化为例,对该方法进行了验证并与传统双循环方法进行了对比.结果表明,优化结果满足可靠性的要求,与双循环方法相比优化效率提高 63.8%,证明了该方法在工程应用中的可行性和有效性.

**关 键 词:** 多学科设计优化; 多学科可行方法; 分解策略; 可靠性分析; Kriging 近似模型; 涡轮叶片  
**中图分类号:** V231.3; TB114.3 **文献标识码:** A

## Reliability and multidisciplinary design optimization for turbine blade based on decoupled method

HE Qian, LI Yuan-sheng, WEN Zhi-xun, YUE Zhu-feng

(Department of Engineering Mechanics,

School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** A suitable reliability-based multidisciplinary design optimization (RBMDO) framework for turbine blade was proposed by combining inverse first order reliability analysis method (inverse FORM) with multidisciplinary feasible (MDF) method. The Kriging approximate model with updating function was introduced to reduce the computational cost of MDF caused by complex structure. The proposed method is efficient since it can decouple reliability analysis process from optimization process. A turbine blade design optimization was employed to illustrate the feasibility and efficiency of the proposed method. It shows that the optimal results can satisfy the required reliability and the efficiency is improved 63.8% by the proposed method as compared with commonly used double-loop based RBMDO method. It is feasible and efficient to apply this method to engineering design.

**Key words:** multidisciplinary design optimization; multidisciplinary feasible method; decoupled method; reliability analysis; Kriging approximate model; turbine blade

**收稿日期:** 2009-07-22; **修订日期:** 2009-12-11

**基金项目:** 博士点基金(N6CJ0001); 国家高薪技术研究发展计划(2006AA04Z401, 2007AA04Z404);

高等学校学科创新引智计划项目(B07050)

**作者简介:** 贺谦(1980-),男,陕西西安人,博士生,主要研究方向为结构可靠性及多学科设计优化.

涡轮叶片的设计涉及气动、传热、结构、寿命等诸多方面,是典型的多学科问题.多学科设计优化(MDO)方法的出现为涡轮叶片的设计提供了便利,并取得了良好的效果<sup>[1-2]</sup>.但是,目前有关涡轮叶片的多学科设计优化是基于确定性条件的优化过程,没有考虑涡轮叶片结构、材料以及工况等因素的不确定性,而这些不确定因素的微小变化都有可能造成航空发动机故障甚至人员伤亡.因此,在涡轮叶片的多学科设计优化过程中,必须考虑不确定性因素的影响,进行基于可靠性的多学科设计优化(RBMDO).

基于可靠性设计优化(RBDO)的传统方法是一个双循环<sup>[3-4]</sup>(double-loop)的优化过程,该方法将可靠性分析嵌套在优化循环中,可靠性分析过程需进行多次优化迭代,计算成本很大,对于复杂结构并不适用.因此,近些年来有关 RBDO 方法的研究主要集中在提高其计算效率方面. Padmanabhan<sup>[5]</sup>采用并行子空间方法进行可靠性分析,并通过系统分析估计可靠性约束的近似形式,优化得到的新解传递给系统分析模块,直到满足收敛条件. FAN Hui<sup>[6]</sup>将并行子空间方法应用于 RBMDO,并将可靠性分析与优化过程分离,提高了计算效率. Agarwal<sup>[7]</sup>同样采用了可靠性分析和优化分离的模式,并且在可靠性分析中加入了优化后的敏感度分析,在提高计算效率的同时,保证了精度. Du<sup>[8-9]</sup>采用当量约束将一个多学科不确定性优化问题转化成近似的 MDO 问题,用 MDO 方法进行求解,并使当量约束逐渐朝概率约束的方向偏移,计算效率较高.

对于提高 RBDO 的计算效率,上述方法的一个共同点是可靠性分析与优化过程分解,避免传统方法的嵌套模式.本文也采用这种分解的思想,结合基本的多学科设计优化方法,对涡轮叶片进行 RBMDO 研究.

## 1 基于分解策略的可靠性及多学科设计优化方法

目前,基于分解策略的 RBO(基于可靠性的优化)方法所采用的框架基本一致,即可靠性分析模块与优化模块分离,优化模块计算得到的最优解传递给可靠性分析模块,通过分析判断是否满足可靠性的要求,如果不满足,重新定义优化模块中不满足可靠性的约束条件,使约束边界从可行域向可行域移动,开始下一次循环,直到收敛,其基本过程如图 1 所示.

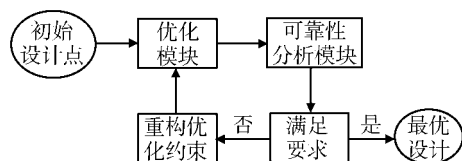


图 1 分解策略的 RBO 方法基本流程

Fig. 1 Procedure of decoupled RBO method

本文所采用的方法也由此框架演变而来,其核心思想是将可靠性约束转化为等价的确定性约束,并采用 MDO 方法进行求解.如图 2 所示,图中的两个坐标系分别为由设计变量  $\mu_{k1}, \mu_{k2}$  (随机变量  $x_1, x_2$  的均值)组成的设计空间,以及由  $x_1, x_2$  组成的随机空间.如果不考虑任何不确定性,曲线  $g(\mu_{k1}, \mu_{k2}) = 0$  就是确定性优化的约束边界;如果考虑不确定性,约束边界变为  $P[g(x_1, x_2) \geq 0] = R$ . 要得到满足可靠性约束的可行解,设计点  $\mu_{k1}, \mu_{k2}$  至少应该在可靠性约束边界  $P[g(x_1, x_2) \geq 0] = R$  上. 由于  $P[g(x_1, x_2) \geq 0] = R$  等价于  $g(x_{mpp}) = 0$ , 即设计点  $\mu_{k1}, \mu_{k2}$  处可靠性约束的计算相当于最可能失效点(MPP)处确定性约束的计算. 因此,通过计算得到要求可靠度  $R$  所对应的 MPP,并以  $g(x_{mpp}) = 0$  为约束,结合现有的 MDO 方法进行优化设计,能够保证每一个可靠性约束的 MPP 至少在确定性约束边界  $g(\mu_{k1}, \mu_{k2}) = 0$  上,从而满足可靠性的设计要求.

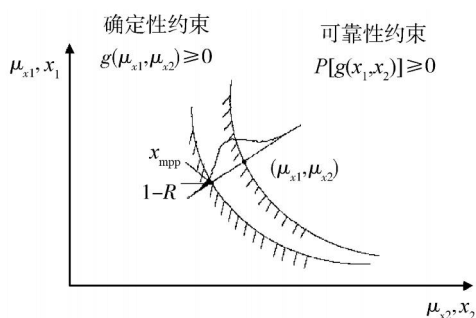


图 2 可靠性约束转化为等价确定性约束示意图

Fig. 2 Sketch map of probabilistic constraint converts to equivalent deterministic constraint

### 1.1 可靠性分析方法

一阶可靠性分析方法(FORM)<sup>[10]</sup>是目前工程应用中广泛采用的可靠性分析方法,该方法通过以最小可靠度指标  $\beta_{\min}$  为目标,极限状态方程  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  为约束的优化迭代过程得到设计点的可靠度  $R$ . 本文中,可靠性分析的目的在于得到要求可靠度  $R$  所对应的 MPP,以及相对应的极限状态方程  $g(x_{i_{mpp}}) = 0$ . 因此,本文采用

以 FORM 为基础的反 FORM 方法<sup>[11]</sup>进行可靠性分析.反 FORM 方法的计算模型如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & g(\xi) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \text{s. t.} \quad & \sqrt{\xi^T} \xi = \beta_{\text{required}} \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\xi$  为随机变量  $x$  对应于  $U$  空间的随机变量,其相互转换通过 Rosenblatt 公式<sup>[12]</sup>进行.反 FORM 方法以要求达到的可靠度指标  $\beta_{\text{required}}$  为约束,状态变量  $g(\xi)$  为目标,通过优化得到要求可靠度  $R$  所对应的 MPP 以及 MPP 处的极限状态方程  $g(x_{1\text{mpp}}, x_{2\text{mpp}}, \dots, x_{n\text{mpp}}) = 0$ , 该方程将作为随后优化过程的约束条件.

## 1.2 基于可靠性的多学科设计优化模型

多学科可行方法<sup>[13]</sup> (MDF) 是多学科设计优化中最常用的一种解耦方法.本文将 MDF 方法与反 FORM 方法相结合,进行基于可靠性的多学科设计优化,优化模型描述如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & f[x, p, y(x, p)], \quad x = (x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. t.} \quad & g_i^{\text{rbo}}(x_{\text{mpp}}, p) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N_{\text{hard}} \\ & g_j^{\text{d}}[x, p, y(x, p)] \geq 0, \quad j = 1, \dots, N_{\text{soft}} \\ & x^{\text{l}} \leq x \leq x^{\text{u}} \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $x$  为随机变量,一般取均值  $\mu_x$ ;  $p$  为设计常量;  $x_{\text{mpp}}$  为对应于要求可靠度的最可能失效点;  $y$  表示各学科状态变量;  $g_i^{\text{rbo}}$  为可靠性约束;  $g_j^{\text{d}}$  为确定性约束;  $x^{\text{l}}, x^{\text{u}}$  为随机变量上下界.

## 1.3 多学科耦合分析及近似模型的建立

涡轮叶片的设计优化是涉及多个学科的复杂过程,出于减少计算量,提高计算效率的目的,本文考虑气动、传热、结构三个学科进行多学科耦合分析.根据有限元理论,利用 ANSYS 软件进行叶片结构分析,采用四面体网格,网格总数 425 497;流热分析利用 Fluent 流体分析软件,流体域和固体域均采用四面体网格,流体域网格总数 153 988,固体域与结构分析的网格总数相同.固体域与流体域交界面上,网格划分保持一致,避免由于网格不一致造成的计算精度及计算效率的降低.采用标准  $\kappa\epsilon$  湍流计算模型,求解平均雷诺数的 Navier-Stokes 方程,流热耦合边界条件如式 (3) 和式 (4) 所示;采用三阶响应面函数插值,实现结构分析和流热分析学科之间的耦合信息传递<sup>[14]</sup>,耦合信息包括叶身气压分布和温度分布.在结构分析中,叶片受压力及温度载荷产生的变形很小,对流热分析中的流场分布影响并不明显,所以在系统耦合分析时没有考虑叶片变形的传递.

$$T_{\text{fluid}} = T_{\text{solid}} \quad (3)$$

$$\kappa_{\text{fluid}} \cdot \nabla T \cdot n_{\text{fluid}} = \kappa_{\text{solid}} \cdot \nabla T \cdot n_{\text{solid}} \quad (4)$$

其中  $T_{\text{fluid}}$  为流固耦合界面上流体域温度,  $T_{\text{solid}}$  为流固耦合界面上固体域温度,  $\kappa_{\text{fluid}}$  为流固耦合界面上流体域传热系数,  $\kappa_{\text{solid}}$  为流固耦合界面上固体域传热系数.

采用 MDF 方法,需要反复调用仿真程序进行多学科分析 (MDA),计算量较大.为了提高计算效率,本文采用 Kriging 近似模型<sup>[15]</sup>代替仿真程序进行设计目标寻优.优化流程包括:①给定一组基准设计点,使用仿真程序对设计点进行多学科分析,并建立数据库文件,这一过程可通过试验设计 (DOE) 完成;②通过数据库文件建立近似模型;③使用近似模型在设计空间中进行搜索,得到近似问题的最优解;④在最优解处调用仿真程序进行实际的仿真分析;⑤将仿真分析的结果加入数据库文件,更新近似模型;重复 ③~⑤,直至收敛.

近似模型是对优化目标和约束的近似,与实际值之间存在误差,因此,验证近似模型精度的误差分析是必不可少的环节.对于试验数据拟合程度的好坏可用复相关系数  $R^2$  来评价,其计算方法如下所示:

$$S_{\text{st}} = \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2 \quad (5)$$

$$S_{\text{se}} = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (6)$$

$$S_{\text{sr}} = S_{\text{st}} - S_{\text{se}} \quad (7)$$

$$R^2 = \frac{S_{\text{sr}}}{S_{\text{st}}} = 1 - \frac{S_{\text{se}}}{S_{\text{st}}} \quad (8)$$

其中  $m$  为采样个数,  $y_i$  为仿真程序计算的真实值,  $\hat{y}_i$  为近似模型的预测值,  $\bar{y}$  是真实值的平均值,  $S_{\text{st}}$  为总平方和,  $S_{\text{se}}$  为误差平方和,  $S_{\text{sr}}$  为回归平方和.  $R^2$  在  $[0, 1]$  之间变化,其值越接近 1,说明误差越小,拟合精度越高.

## 1.4 基于分解策略的可靠性及多学科设计优化流程

由于将可靠性分析与多学科优化过程分离,避免了传统双循环 RBMDO 的嵌套模式,本文提出的基于分解策略的可靠性及多学科设计优化方法具有较高的计算效率.该方法包括:①通过 DOE 确定设计变量,并建立数据库文件,构建 Kriging 近似模型;②通过基于 Kriging 近似的 MDF 方法,得到确定性优化后的设计变量;③在最优解处进行 MDA,并更新近似模型;④采用反 FORM 方法对确定性优化结果进行可靠性分析,

计算 MPP; ⑤在 MPP 处建立等价的确定性约束  $g(x_{1\_mpp}, x_{2\_mpp}, \dots, x_{n\_mpp}) = 0$ ; ⑥以等价的确定性约束为优化约束,通过基于 Kriging 近似的 MDF 方法,得到优化后的设计变量; ⑦在最优设计点进行 MDA,更新近似模型;随后重复 ⑥~ ⑦,直至收敛. 具体流程如图 3 所示,图中数字“1,2”表示计算顺序,即先执行流程 1,再执行流程 2.

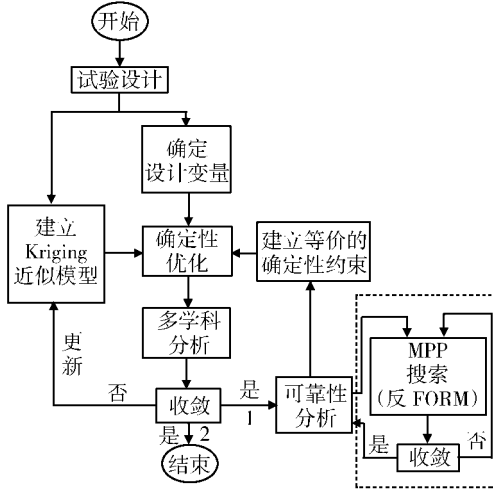


图 3 基于分解策略的 RBMDO 流程

Fig. 3 Flowchart of decoupled RBMDO framework

## 2 算 例

本文将反 FORM 可靠性分析方法和 MDF 方法相结合,采用基于分解策略的可靠性及多学科设计优化方法对某型涡轮叶片进行设计优化. 首先进行确定性多学科设计优化,并对优化结果进行可靠性分析,说明进行 RBMDO 的必要性; 随后采用本文方法对涡轮叶片进行优化,并对优化结果进行可靠性分析,验证该方法在工程应用中的可行性. 最后将该方法与双循环 RBMDO 方法进行对比,说明该方法具有很高的计算效率.

根据试验设计的结果,确定叶片顶部和底部两个截面的前缘半径,前缘构造角和进气角共 6 个参数作为设计变量. 以叶片最高温度、叶尖最大变形以及叶身最大应力为约束,以最小总压损失为优化目标. 设计变量及约束的变化范围如表 1 所示. 以 MDF 方法解耦,结合多岛遗传和序列二次规划算法对涡轮叶片进行确定性的多学科设计优化,采用 Hasofer-Lind and Rackwitz-Fiessler (HL-RF) 方法<sup>[16]</sup>对优化结果进行可靠性分析. 优化和分析结果如表 2 所示. 结果表明,叶尖最大变形和叶片最高温度的可靠度达到了 99.24 %和 99.95 %,这样的优化结果是可以接受的. 但叶身

最大应力的可靠度仅为 43.13 %,不能满足工程应用的要求. 因此有必要进行基于可靠性的多学科设计优化.

将确定性优化的设计变量定义为随机变量,假设其满足正态分布,变异系数为 0.1. 设定需要达到的可靠度为 0.95 ( $\beta = 1.645$ ),以 MDF 方法解耦,结合改进的可行方向优化算法以及反 FORM 可靠性分析方法进行设计优化,可靠性分析过程采用序列二次规划算法进行 MPP 寻优,优化模型和可靠性分析模型如式 (9)、式 (10). 可靠性分析是一个多目标的优化过程. 本文采用线性加权法将多个目标重新构造为单一的优化目标,式 (10) 可表示为式 (11). 其中,  $w_T, w_\sigma, w_U$  分别为叶片最大温度、叶尖最大变形以及叶身最大应力作为优化目标时的权重因子;  $s_T, s_\sigma, s_U$  分别为上述变量作为优化目标时的比例因子,本文取  $w_T/s_T = w_\sigma/s_\sigma = w_U/s_U = 1$ . 采用 HL-RF 方法对最终优化结果进行可靠性分析. 根据试验设计建立优化目标和约束的初始 Kriging 近似模型,通过多学科分析更新近似模型,提高精度.

### 优化模型

$$\begin{aligned} \min \quad & p_{\text{loss}}^* \\ \text{s. t.} \quad & \beta(T_{\text{max}} \leq 1310 \text{ K}) \geq 1.645 \\ & \beta(\sigma_{\text{max}} \leq 350 \text{ MPa}) \geq 1.645 \\ & \beta(U_{\text{max}} \leq 0.6 \text{ mm}) \geq 1.645 \end{aligned} \quad (9)$$

### 可靠性分析模型

$$\begin{aligned} \min \quad & g_T(\xi) \\ \min \quad & g_\sigma(\xi) \\ \min \quad & g_U(\xi), \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6) \\ \text{s. t.} \quad & \sqrt{\xi^T} \xi = 1.645 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \left[ \frac{w_T}{s_T} g_T(\xi) + \frac{w_\sigma}{s_\sigma} g_\sigma(\xi) + \frac{w_U}{s_U} g_U(\xi) \right] \\ \xi = & (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6) \\ \text{s. t.} \quad & \sqrt{\xi^T} \xi = 1.645 \end{aligned} \quad (11)$$

采用本文方法的优化结果见表 2. 叶身最大应力的可靠度提高到 95.73 %,优化结果满足可靠性约束的要求. 总压损失与初值相比下降了 4.7 %,但与确定性优化相比有所提高,这是由于考虑了不确定因素的影响,在优化中牺牲了部分性能以满足可靠性的要求,这也说明 RBMDO 是一个折中过程,最终使结构性能和可靠性要求达到平衡. 叶片经过基于分解策略的可靠性及多学科设计优化前后的叶尖及叶根截面型线见图 4.

为了检验本文方法的计算效率,在相同设计变量、约束条件和可靠性条件下,采用双循环 RB-

MDO 方法对涡轮叶片进行优化,优化结果见表 2。由于将可靠性分析与多学科优化过程分离,本文方法与双循环 RBMDO 方法相比,计算效率明显提高。

表 1 设计变量和约束的设计上下限  
Table 1 Upper and lower limits of design variables and constraints

|    | 设计变量                   |                           |                      |                        |                           |                      | 优化约束                          |                              |                                     |
|----|------------------------|---------------------------|----------------------|------------------------|---------------------------|----------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
|    | 叶尖截面                   |                           |                      | 叶根截面                   |                           |                      | 叶尖<br>最大变形<br>$U_{\max}$ / mm | 叶身<br>最高温度<br>$T_{\max}$ / K | 叶身<br>最大应力<br>$\sigma_{\max}$ / kPa |
|    | 前缘<br>半径<br>$r_1$ / mm | 前缘<br>构造角<br>$\phi$ / (°) | 进气角<br>$\beta$ / (°) | 前缘<br>半径<br>$r_4$ / mm | 前缘<br>构造角<br>$\phi$ / (°) | 进气角<br>$\beta$ / (°) |                               |                              |                                     |
| 上限 | 2.000                  | 20.000                    | 115.000              | 2.400                  | 30.000                    | 115.000              | 0.600                         | 1310                         | 350 000                             |
| 下限 | 0.500                  | 10.000                    | 100.000              | 0.800                  | 20.00                     | 100.000              | 0                             | 0                            | 0                                   |

表 2 确定性优化与两种 RBMDO 优化结果比较  
Table 2 Comparison of results between deterministic optimization and two RBMDO

| 设计变量                          |                    | 初始值         | 确定性优化结果     | 双循环 RBMDO 结果    | 本文 RBMDO 结果 |                |             |
|-------------------------------|--------------------|-------------|-------------|-----------------|-------------|----------------|-------------|
| 叶尖截面                          | 前缘半径 $r_1$ / mm    | 0.974       | 1.192       | 1.235           | 1.212       |                |             |
|                               | 前缘构造角 $\phi$ / (°) | 15.400      | 11.547      | 14.972          | 13.088      |                |             |
|                               | 进气角 $\beta$ / (°)  | 106.630     | 101.753     | 103.539         | 104.115     |                |             |
| 叶根截面                          | 前缘半径 $r_4$ / mm    | 1.900       | 2.026       | 2.041           | 2.045       |                |             |
|                               | 前缘构造角 $\phi$ / (°) | 28.000      | 23.800      | 24.015          | 23.893      |                |             |
|                               | 进气角 $\beta$ / (°)  | 106.630     | 103.541     | 104.284         | 105.112     |                |             |
| 输出变量                          | 初始值                | 确定性<br>优化结果 | 可靠性<br>R/ % | 双循环<br>RBMDO 结果 | 可靠性<br>R/ % | 本文<br>RBMDO 结果 | 可靠性<br>R/ % |
| 叶身最大应力 $\sigma_{\max}$ / kPa  | 343 280            | 342 742.056 | 43.13       | 321 730         | 96.1        | 322 519.73     | 95.73       |
| 叶尖最大变形 $U_{\max}$ / mm        | 0.492              | 0.504       | 99.24       | 0.485           | 1.000       | 0.488          | 1.000       |
| 叶身最高温度 $T_{\max}$ / K         | 1 300.54           | 1 300.021   | 99.95       | 1 298.850       | 99.997      | 1 301.225      | 99.89       |
| 总压损失 $p_{\text{loss}}^*$ / Pa | 64 519.3           | 60 280.497  |             | 61 993.633      |             | 61 481.50      |             |
| 优化时间 $t$ / h                  |                    |             |             | 385.7           |             | 139.5          |             |

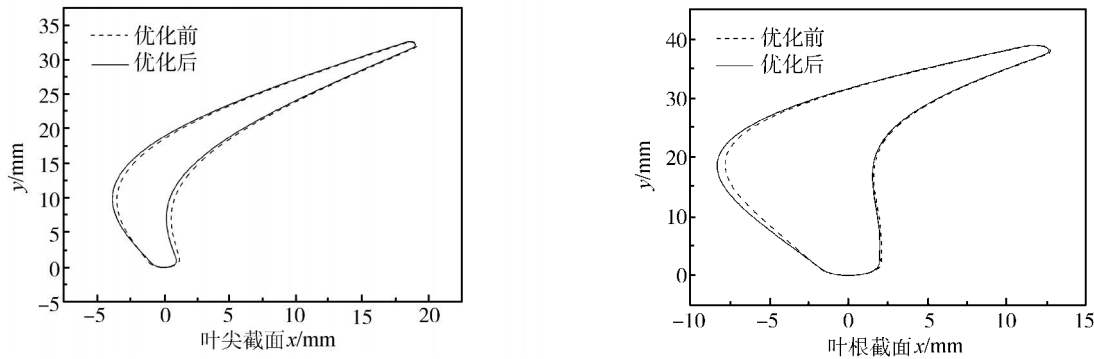


图 4 基于分解策略的 RBMDO 前后叶片截面型线比较  
Fig. 4 Comparison of the profile lines between before and after decoupled RBMDO

### 3 结 论

将反 FORM 可靠性分析方法和 MDF 多学科设计优化相结合,提出了一种适用于涡轮叶片复杂结构的可靠性多学科设计优化方法.在优化过程中使用 Kriging 近似模型并不断提高模型精度,解决了 MDF 方法反复调用仿真程序进行多学科分析,计算量较大的问题.该方法将可靠性分析与多学科优化过程分离,避免了传统双循环 RBMDO 的嵌套模式,提高了 RBMDO 计算效率.以涡轮叶片的设计优化为例,对该方法进行了验证,并与确定性 MDO 以及双循环 RBMDO 结果进行了对比.结果表明,确定性优化的结果可靠性较低而本文方法的优化结果满足可靠性要求,说明了进行 RBMDO 的必要性以及该方法的可行性.与双循环 RBMDO 方法相比,本文方法的计算效率明显提高,说明本文方法适用于复杂工程结构的设计优化.

### 参考文献:

- [1] 吴立强,尹泽勇,蔡显新.航空发动机涡轮叶片的多学科设计优化[J].航空动力学报,2005,20(5):795-801.  
WU Liqiang, YIN Zeyong, CAI Xianxin. MDO technology applied to the aero-engine turbine blade design [J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(5): 795-801. (in Chinese)
- [2] 岳珠峰,李立州,虞跨海,等.航空发动机涡轮叶片多学科设计优化[M].北京:北京科学出版社,2007.
- [3] Mahadevan S, Gantt C W. Probabilistic design optimization of a multidisciplinary system [R]. AIAA-2000-4807, 2000.
- [4] Aminpour M A, Shin Y, Sues R H, et al. A framework for reliability-based MDO of aerospace systems [R]. AIAA-2002-1476, 2002.
- [5] Padmanabhan D, Batill S M. Decomposition strategies for reliability based optimization in multidisciplinary system design [R]. AIAA-2002-5471, 2002.
- [6] FAN Hui, LI Weiji. An efficient method for reliability-based multidisciplinary design optimization [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008(22): 335-340.
- [7] Agarwal H, Renaud J E. New decoupled framework for reliability-based design optimization [J]. AIAA Journal, 2006, 44(7): 1524-153.
- [8] Du X P, Guo J, Beeram H. Sequential optimization and reliability assessment for multidisciplinary systems design [J]. Struct Multidisc Optim., 2008(35): 117-130.
- [9] Du X P, Chen W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design [C] // Proceedings of ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Montreal, Canada: ASME, 2002: 1-10.
- [10] Thanedar P B, Kodiyalam S. Structural optimization using probabilistic constraints [J]. Structural Optimization, 1992(4): 236-240.
- [11] Li H, Foschi R O. An inverse reliability method and its application [J]. Structural Safety, 1998, 20(3): 257-270.
- [12] Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation [J]. Ann. Math. Stat., 1952, 23(3): 470-472.
- [13] Perez R E, Liu H H T. Evaluation of multidisciplinary optimization approaches for aircraft conceptual design [R]. AIAA-2004-4537, 2004.
- [14] 李立州,王婧超,吕震宙,等.学科间载荷参数空间插值传递方法[J].航空动力学报,2007,22(7): 1050-1054.  
LI Lizhou, WANG Jingchao, LÜ Zhenzhou, et al. Interpolation loads transferring method among disciplines in parametric space [J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(7): 1050-1054. (in Chinese)
- [15] 韩永志,高行山,李立州,等.基于 Kriging 模型的涡轮叶片多学科设计优化 [J]. 航空动力学报, 2007, 22(7): 1055-1059.  
HAN Yongzhi, GAO Hangshan, LI Lizhou, et al. Kriging model-based multidisciplinary design optimization for turbine blade [J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(7): 1055-1059. (in Chinese)
- [16] Rackwitz R, Fiessler B. Structural reliability under combined load sequences [J]. Computers and Structures, 1978(9): 489-49.